DEF RADICE POSITIVA

Fissata una base $\alpha_1 \dots \alpha_n$ in Σ,

prendo una radice generica $\rho = \sum_i c_i \alpha_i$

Chiamo $\rho > 0$ se il primo $c_i \neq 0$ è positivo

È una definizione arbitraria, perché è arbitraria la scelta di base $\alpha_1 \dots \alpha_n$ e il loro ordinamento. Però una volta fissata la posso usare per stabilire p.es. se una radice ρ è maggiore di una radice σ, nel senso che $\rho - \sigma > 0$

DEF. RADICE SEMPLICE

È una radice positiva che non si può esprimere come combinaz. lineare di due radici positive

P.es. in $SU(2)$

$$\alpha_1 = a \qquad > 0 \qquad \alpha_1 > 0$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}a + b \qquad < 0 \qquad -\alpha_2 > 0$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}a + b \qquad > 0 \qquad \alpha_3 > 0$$

Se $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ poiché $\alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_1$ $\quad c_1 < 0$ e $\alpha_2 < 0$

Se $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, -\alpha_2\}$ $\quad \alpha_3 = \alpha_1 - (-\alpha_2)$ sarebbe positiva, ma non semplice

$$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3\} = \{\overbrace{\underbrace{\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3}_{>0}}^{\Pi^+}, \overbrace{\underbrace{-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3}_{<0}}^{\Pi^-}\}$$

$$\Sigma = \Pi^+ \oplus \Pi^- = \underbrace{\Pi^+_\sigma}_{\text{positive e semplici}} \oplus \underbrace{\Pi^+_{\not\sigma}}_{\text{solo positive}} \oplus \underbrace{\Pi^-}_{\text{negative}}$$

PROPRIETÀ DI RADICI SEMPLICI σ

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \leq 0$$

DIMOSTRAZIONE

Se fosse positivo

$$2\frac{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle}{\langle \sigma_2 \sigma_2 \rangle} = (m_2 - p_2) > 0 \qquad m_2 > 0$$

e dunque σ_1 sarebbe in una sequenza di passo σ_2 partita da $\sigma_1 - \sigma_2$

$(\sigma_1 - \sigma_2) \notin \Sigma$ perché se no $\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_1$ sarebbe ottenibile come combinazione lineare di due radici. Se $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$ ho violato l'ipotesi. Se posso invece $\sigma_1 - \sigma_2 < 0$ posso ripetere con l'osservazione speculare

$$2\frac{\langle \delta_1 \delta_2 \rangle}{\langle \delta_1 \delta_1 \rangle} = (m_1 - p_1) > 0 \qquad m_1 > 0$$

$\delta_2 - \delta_1$ non può essere una radice, altrimenti avrei che

$\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1) = \delta_1$ è una comb. lineare di radici positive

COROLLARIO

SEGUE CHE LE RADICI POSITIVE SONO VETTORI IN H^* LINEARMENTE INDIPENDENTI

SE COSÌ NON FOSSE

Allora potrei scrivere lo stesso vettore $\rho \in H^*$

$$\rho = \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \in \Pi^+} a_i \alpha_i = \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \in \Pi^+} b_j \beta_j$$

cioè nessun α_i compare sia a sinistra sia a destra

$$0 < \langle \rho, \rho \rangle = \sum_i a_i^2 \langle \alpha_i \alpha_i \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \overbrace{\langle \alpha_i \beta_j \rangle}^{<0}$$

essendo $\langle \alpha_i \beta_j \rangle \leq 0$ la doppia decomposizione di ρ

porta ad una contraddizione. Segue che π^+ sono lin. indip.